Lösungen zu Serie 2

Relationen, Mächtigkeit

1. Bestimmen Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ und die entsprechenden Partitionen von X. (2)

   Lösung:

   Wir bestimmen alle Relationen $\mathcal{R} \subset X \times X$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind. Wegen der Reflexivität muss für jede solche Relation $\{(1,1),(2,2),(3,3)\} \subset \mathcal{R}$ gelten. Wenn $(1,2) \in \mathcal{R}$ ist, so muss auch $(2,1) \in \mathcal{R}$ gelten wegen der Symmetrie. Ebenso für die Paare $(1,3)$ und $(3,1)$ sowie $(2,3)$ und $(3,2)$. Wenn die Relation $\mathcal{R}$ zwei der Mengen $\{(1,2),(2,1)\}$, $\{(1,3),(3,1)\}$ und $\{(2,3),(3,2)\}$ enthält, so muss sie wegen der Transitivität auch die dritte dieser Mengen enthalten. Wir erhalten die folgenden möglichen Äquivalenzrelationen:

   - $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ mit der Partition $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ von X
   - $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ mit der Partition $\{\{1,2\},\{3\}\}$
   - $\mathcal{R}_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ mit der Partition $\{\{1,3\},\{2\}\}$
   - $\mathcal{R}_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ mit der Partition $\{\{1\},\{2,3\}\}$
   - $\mathcal{R}_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$ mit der Partition $\{\{1,2,3\}\}$

2. In dieser Aufgabe behaupten wir fälschlicherweise, dass jede symmetrische und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge X auch reflexiv ist (d.h. eine Äquivalenzrelation ist). Finden Sie den Fehler in folgendem „Beweis":
   Sei $x \in X$ ein Element. Sei $y \in X$, so dass $x \sim y$. Wegen Symmetrie der Relation gilt also auch $y \sim x$. Folglich gilt unter Verwendung der Transitivität der Relation $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow x \sim x$, was zu zeigen war.
   Finden Sie ein Beispiel einer Relation, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

   Lösung:

   Der Fehler ist, dass solch ein Element $y \in X$ mit $x \sim y$, wie zu Beginn des Beweises angenommen, nicht existieren muss. Eine Relation, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist, ist zum Beispiel die Relation $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = a \neq 1\}$ auf der Menge $\mathbb{N}$. Es gilt also $a \sim b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $a = b$ und $a \neq 1$ gilt. Diese Relation ist nicht reflexiv, denn $1 \not\sim 1$ wegen $1 = 1$. Es gibt insbesondere kein $a \in \mathbb{N}$ mit $1 \sim a$ wie im „Beweis" angenommen. Es ist allerdings leicht zu sehen, dass $\mathcal{R}$ eine symmetrische und transitive Relation ist.

3. (a) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ derart, dass (2)

   $$a \sim (a+7) \qquad \text{und} \qquad a \sim (a+10)$$

   für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt $1 \sim 2$? Wie viele Elemente hat der Quotient $\mathbb{N}/\!\sim$?

   Lösung:

   Wir zeigen zuerst, dass die Äquivalenzen $a \sim (a+7)$ und $a \sim (a+10)$ implizieren, dass $a \sim (a+1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$. In der Tat ist

   $$a \sim (a+7) \sim (a+14) \sim (a+21) \sim (a+11) \sim (a+1),$$

wobei wir wegen der Symmetrie $(a + 10) \sim a$ für alle $a \in \mathbb{N}$ benutzen konnten. Aus mehrfacher Anwendung der Transitivität folgt nun $a \sim (a+1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $1 \sim 2$.

Als nächstes folgern wir, dass $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Wegen der Symmetrie ist es genug zu zeigen, dass $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$. Für solche a und b gilt

$$a \sim (a+1) \sim \ldots \sim (b-1) \sim b.$$

Wiederum mehrfache Anwendung der Transitivität zeigt $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

Also sind alle Elemente aus $\mathbb{N}$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation zueinander äquivalent, das heißt die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{N}/\sim$ besteht nur aus einem Element.

(b) (Verallgemeinerung von Teil (a)) Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ zwei positive Zahlen und sei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation (beinhaltet also möglichst wenige Relationen) auf der Menge $\mathbb{N}$, so dass (∗)

$$a \sim (a + d_1) \qquad \text{und} \qquad a \sim (a + d_2)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente hat der Quotient $\mathbb{N}/\sim$? Tipp: Googlen Sie *Lemma von Bézout*.

Lösung:

Wir behaupten, dass die zwei Äquivalenzen $a \sim (a+d_1)$ und $a \sim (a+d_2)$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gleichwertig sind zur Äquivalenz

$$a \sim (a + \mathrm{ggT}(d_1, d_2))$$

für alle $a \in \mathbb{N}$, wobei $d = \mathrm{ggT}(d_1, d_2)$ für den grössten gemeinsamen Teiler[1] steht.

Die ggT-Äquivalenz impliziert die zwei anderen Äquivalenzen: Da der größte gemeinsame Teiler d ein Teiler von d_1 ist (also $c_1 d = d_1$ für ein $c_1 \in \mathbb{N}$), können wir $a \sim (a + d)$ nacheinander c_1-mal anwenden, also

$$a \sim (a + d) \sim (a + 2d) \sim \ldots \sim (a + c_1 d),$$

und dann Transitivität benutzen, um $a \sim (a + dc_1) = (a + d_1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$ herzuleiten. Analog können wir aus $a \sim (a + d)$ auch $a \sim (a + d_2)$ für alle $a \in \mathbb{N}$ herleiten.

Die zwei Äquivalenzen implizieren die ggT-Äquivalenz: Sei dazu $c > 0$ die kleinste positive Zahl, so dass $a \sim (a + c)$ aus $a \sim (a + d_1)$ und $a \sim (a + d_2)$ für alle $a \in \mathbb{N}$ folgt. Da c durch mehrmaliges Anwenden der beiden Äquivalenzen entstanden sein muss, ist c die kleinste positive Zahl, so dass $c = sd_1 + td_2$ für $s, t \in \mathbb{Z}$. (In Teilaufgabe (a) haben wir zum Beispiel dreimal $d_1 = 7$ addiert und $d_2 = 10$ zweimal abgezogen und kamen auf $c = 1$. Also war $s = 3$ und $t = -2$ bzw $1 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10$. Da c positiv sein soll, gibt es kein kleiner mögliches c. Bemerke auch, dass s und t nicht eindeutig sind.)

Wir wollen zeigen, dass $c = d$, also der grösste gemeinsame Teiler von d_1 und d_2 ist. Dies ist implizit das Lemma von Bézout.

Es reicht zu zeigen, dass

(1) die Zahl c ein gemeinsamer Teiler von d_1 und d_2 sein muss. Insbesondere ist dann $c \leq d$.

(2) der größte gemeinsame Teiler d die Zahl c teilt. Insbesondere ist dann $d \leq c$.

Zusammen bekommen wir $c = d$ und haben dann die ganze Aufgabe gelöst: wir sehen, dass $\mathbb{N}/\sim$ genau $\mathrm{ggT}(d_1, d_2)$ viele Elemente besitzt.

Beweis von (1): Betrachten wir zuerst nur d_1 und führen eine Division durch c mit Rest durch. Wir kriegen $d_1 = cq + r$ mit $0 \leq r < c$. Wir wissen, dass $c = sd_1 + td_2$ ist, also haben wir $r = (1 - qs)d_1 + (-qt)d_2$. Also ist r auch eine Linearkombination von d_1 und d_2, welche aber kleiner als c ist. Da aber c die kleinste solche positive Zahl ist, muss $r = 0$ sein, also ist $d_1 = cq$, was bedeutet, dass c ein Teiler von d_1 ist. Analog zeigt man, dass c ein Teiler von d_2 sein muss.

Beweis von (2): Da d ein gemeinsamer Teiler von d_1 und d_2 ist, gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $c_1 d = d_1$ und $c_2 d = d_2$. Mit $c = sd_1 + td_2$ bekommen wir $c = sd_1 + td_2 = d(sc_1 + tc_2)$, also teilt d auch c.

Wir haben gezeigt, dass die gegebene Relation durch $a \sim (a + \mathrm{ggT}(d_1, d_2))$ für alle $a \in \mathbb{N}$ definiert ist. Die Äquivalenzklassen der Relation sind demnach $\{1, 1 + \mathrm{ggT}(d_1, d_2), 1 + 2\,\mathrm{ggT}(d_1, d_2), \ldots\}, \{2, 2 + \mathrm{ggT}(d_1, d_2), 2 + 2\,\mathrm{ggT}(d_1, d_2), \ldots\}, \ldots, \{\mathrm{ggT}(d_1, d_2), 2\,\mathrm{ggT}(d_1, d_2), 3\,\mathrm{ggT}(d_1, d_2), \ldots\}$. Also hat der Quotient $\mathbb{N}/\sim$ genau $\mathrm{ggT}(d_1, d_2)$ viele Elemente.

Tatsächlich sind die Eigenschaften der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität einer Relation vollständig unabhängig voneinander und müssen alle einzeln überprüft werden. So ist zum Beispiel eine symmetrische und transitive Relation nicht automatisch schon reflexiv, siehe Aufgabe 2. Für jeden der acht möglichen Fälle (keine der drei Eigenschaften ist erfüllt, genau eine oder genau zwei der drei Eigenschaften sind erfülllt, oder alle drei Eigenschaften sind erfüllt) können Sie Beispiele angeben, die diese Unabhängigkeit der drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation zeigen. In der folgenden Aufgabe behandeln wir drei dieser acht Fälle.

4. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

   1. nur die Symmetrie,
   2. nur die Transitivität,
   3. die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

   erfüllt.

   Lösung:

   1. Die Relation $\neq$ erfüllt nur die Symmetrie-Eigenschaft. Reflexivität ist nicht erfüllt, weil $a \neq a$ falsch ist. Ausserdem implizieren $a \neq b$, $b \neq c$ nicht $a \neq c$, da $a = c \neq b$ vorkommen kann.
   2. Die Relation $<$ erfüllt nur die Transitivität. Reflexivität $a < a$ ist falsch, und $a < b$ impliziert nicht $b < a$.
   3. Die Relation Teilbarkeit $|$ erfüllt die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie: $2|4$, aber $4|2$ ist falsch.

5. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{5\}$ gibt.

   Lösung:

   Wir zeigen, dass es eine Bijektion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und eine Bijektion $h\colon \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}\backslash\{5\}$ gibt. Die Verkettung $h \circ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{5\}$ ist dann die gewünschte Bijektion.
   Wir definieren $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}, n \mapsto n + 1$. Dann ist g injektiv, denn für $n, m \in \mathbb{N}$ mit

   $$n + 1 = g(n) = g(m) = m + 1$$

   gilt wegen $n + 1 = m + 1$ auch $n = m$. Außerdem ist g surjektiv, denn für $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ist $n - 1$ in $\mathbb{N}$ und $g(n - 1) = n$, also $g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Alternativ sieht man leicht, dass $\mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$ eine inverse

[1] Der grösste gemeinsame Teiler d zweier positiver Zahlen $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ ist definiert als die grösste Zahl $d \in \mathbb{N}$, so dass es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ gibt mit $c_1 d = d_1$ und $c_2 d = d_2$.

Abbildung zu g ist.
Wir behaupten, dass die Abbildung

$$h\colon \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}\backslash\{5\}, \begin{cases} n \mapsto n, n \neq 5 \\ 5 \mapsto 1 \end{cases}$$

ebenfalls eine Bijektion ist. Injektivität: Seien $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $h(n) = h(m)$. Falls $n, m \neq 5$ ist, so gilt $n = h(n) = h(m) = m$. Falls eine der beiden Zahlen n, m gleich 5 ist, sei dies ohne Einschränkung $n = 5$, so gilt $1 = h(m)$. Damit muss auch $m = 5$ gelten, denn nur 5 wird von h auf 1 geschickt. Surjektivität: Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{5\}$. Falls $n = 1$, so ist $5 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ein Urbild von n unter h. Für $n \neq 1$ ist $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $h(n) = n$. Also gilt $h(\mathbb{N}\backslash\{1\}) = \mathbb{N}\backslash\{5\}$. Alternativ könnte man auch für h eine Umkehrabbildung angeben, nämlich

$$\mathbb{N}\backslash\{5\} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}, \begin{cases} n \mapsto n, n \neq 1 \\ 1 \mapsto 5. \end{cases}$$

6. (a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Bildes, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

   Lösung:

   Das Bild zu dieser Aufgabe finden Sie in der Datei Gitter.pdf. Die Idee ist das nach rechts und unten unendlich große Gitter $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vollständig abzustreichen, indem man in Schlangenlinien die endlichen Antidiagonalen $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m + n = k\}$ für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ durchläuft. Also $(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (3,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (1,4) \to \ldots$.

   Dies definiert eine Bijektion $p\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Tatsächlich können wir für p eine Formel angeben, es gilt $p(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 2)(x + y - 1) + x$. Es ist aber nicht leicht anhand dieser Formel zu zeigen, dass p eine Bijektion ist. In Aufgabe 1 (b) der Serie 1 zur Vorlesung Analysis I haben Sie eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gesehen, für die es leichter war, die Eigenschaften einer Bijektion nachzuprüfen. Also haben Sie dort schon bewiesen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist. Hier wollten wir einen anschaulichen Beweis dieser Aussage zeigen.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^k$ abzählbar unendlich ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

   Lösung:

   Wir zeigen dies durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 1$ ist per Definition des Begriffs „abzählbar unendlich“ nichts zu zeigen. Für $k = 2$ müssen wir zeigen, dass $\mathbb{N}^2$ abzählbar unendlich ist, dies haben wir in (a) gesehen. Den Induktionsanfang haben wir also gezeigt.
   Angenommen, wir wissen bereits, dass $\mathbb{N}^k$ abzählbar ist. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbb{N}^{k+1}$ abzählbar ist. Es ist $\mathbb{N}^{k+1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ldots \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ das Produkt zweier abzählbar unendlicher Mengen. Dabei benutzen wir die Induktionsvoraussetzung, dass $\mathbb{N}^k$ abzählbar unendlich ist. Es gibt also eine Bijektion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass die Abbildung

   $$g\colon \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, n) \mapsto (f(a), n)$$

   eine Bijektion ist. Zusammen mit einer Bijektion $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die wegen (a) existiert, bekommen wir dann durch $h \circ g$ eine Bijektion $\mathbb{N}^{k+1} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{N}^{k+1}$ abzählbar unendlich ist.
   Bleibt also zu zeigen, dass g bijektiv ist.
   Injektivität: Seien $a, b \in \mathbb{N}^k, n, m \in \mathbb{N}$ mit $g(a, n) = g(b, m)$, also $(f(a), n) = (f(b), m)$. Dann gilt $f(a) = f(b)$ und $n = m$. Da f eine Bijektion, also insbesondere injektiv ist, folgt $a = b$ aus $f(a) = f(b)$. Wir bekommen $(a, n) = (b, m)$.
   Surjektivität: Sei $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wegen der Surjektivität von f gibt es ein $a \in \mathbb{N}^k$ mit $f(a) = n$. Dann ist $g(a, m) = (f(a), m) = (n, m)$, also $(n, m) \in g(\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$. Also ist g surjektiv, was zu zeigen war.

7. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, wobei I eine abzählbar unendliche Menge ist und jede der Mengen A_i abzählbar unendlich ist. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar unendlich ist.

Lösung:

Für jedes $i \in I$ gibt es eine Bijektion $f_i \colon A_i \to \mathbb{N}$, da A_i abzählbar unendlich ist. Weiter gibt es eine Bijektion $g \colon I \to \mathbb{N}$, da auch I abzählbar unendlich ist.

Behauptung: $\mathbb{N}$ ist *höchstens so mächtig* wie $\bigcup_{i \in I} A_i$, d.h. $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{i \in I} A_i|$.

Beweis: Weil f_1 injektiv ist, ist auch die Abbildung $k \colon \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i, n \mapsto f_1^{-1}(n)$ injektiv, wobei f_1^{-1} die inverse Abbildung von f_1 ist. □

Behauptung: Es existiert eine surjektive Abbildung $h \colon \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$.

Beweis: Wir definieren zunächst die Abbildung

$$\tilde{h} \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad (n, m) \mapsto f_{g(n)}(m). \tag{1}$$

Dann ist $\tilde{h}$ ist surjektiv: Sei $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $a \in A_{i_0}$. Weil f_{i_0} surjektiv ist, gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_{i_0}(m) = a$. Außerdem gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g(n) = i_0$, da g surjektiv ist. Folglich ist $\tilde{h}(n, m) = f_{i_0}(m) = a$, also ist $\tilde{h}$ surjektiv.

Gemäß Aufgabe 6 existiert eine Bijektion $l \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann liefert $h = \tilde{h} \circ l$ eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\bigcup_{i \in I} A_i$. □

Aus nachfolgender allgemeingültiger Aussage erhält man damit die Existenz einer injektiven Abbildung $\bar{h} \colon \bigcup_{i \in I} A_i \to \mathbb{N}$. Mit dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein (Theorem 1.81 im Analysis-Skript) folgt daraus und aus der ersten Behauptung, dass $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar unendlich ist.

Behauptung: Seien A, B Mengen und $h \colon A \to B$ eine surjektive Abbildung. Dann existiert eine injektive Abbildung $\bar{h} \colon B \to A$ mit $h \circ \bar{h} = \mathrm{id}_B$.

Beweis: Für jedes $b \in B$ ist $h^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid h(a) = b\} \neq \emptyset$ da h surjektiv ist. Wir können nun aus jeder der nichtleeren Mengen $h^{-1}(\{b\})$ ein Element a_b auswählen und setzen $\bar{h}(b) = a_b$ für $b \in B$. Dazu müssen wir für jedes $b \in B$ eine Wahl treffen. Formal verwendet dies das sogenannte Auswahlaxiom der Mengenlehre (Axiom of Choice), welches wir implizit erlauben werden. Nun ist $\bar{h} \colon B \to A$ eine wohldefinierte Funktion und für ein beliebiges $b \in B$ gilt dann $(h \circ \bar{h})(b) = h(a_b) = b = \mathrm{id}_B(b)$, da $a_b \in h^{-1}(\{b\})$ gewählt war. Ferner ist $\bar{h}$ injektiv, denn seien $b, b' \in B$ mit $\bar{h}(b) = \bar{h}(b')$. Dann gilt $h(\bar{h}(b)) = h(\bar{h}(b'))$, also wegen $h \circ \bar{h} = \mathrm{id}_B$ auch $b = b'$. □

Bemerkung:

Folgende Variante dieses Resultats ist sehr nützlich: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Menge, wobei I höchstens abzählbar ist und jede der Mengen A_i höchstens abzählbar ist. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ höchstens abzählbar. Hierbei heißt eine Menge *höchstens abzählbar*, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Man sieht leicht, dass eine Menge A höchstens abzählbar ist genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach A gibt.
Die Variante folgt dann aus dem Beweis der obigen zweiten Behauptung, wenn man beachtet, dass wir darin lediglich die Surjektivität der f_i's bzw. von g benutzt haben.

8. Es bezeichne $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$. Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ abzählbar? (2)
Tipp: Eine Art dies zu zeigen, ist zu benutzen, dass jede endliche Menge $X \subset \mathbb{N}$ ein *Maximum* besitzt, d.h. es existiert ein Element $x \in X$, sodass $n \leq x$ für alle $n \in X$ gilt. Dies werden Sie später in der Analysis-Vorlesung sehen, können Sie aber auch durch Induktion zeigen.

Lösung:

Wir behaupten, dass

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{A \mid A \subset \{1,\dots,m\}\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\left(\{1,\dots,m\}\right) \tag{2}$$

gilt. Da $\mathcal{P}\left(\{1,\dots,m\}\right)$ endlich ist mit Kardinaliät 2^m für alle $m \in \mathbb{N}$, ist dann $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ eine abzählbare Vereinigung endlicher, also höchstens abzählbarer, Mengen, also höchstens abzählbar wegen obiger Bemerkung zu Aufgabe 7.
Bleibt also noch die erste Gleichheit in (2) zu zeigen. Wir zeigen dies, indem wir die beiden Inklusionen „ $\subseteq$ “ und „ $\supseteq$ “ zeigen.
„ $\subseteq$ “: Sei $A \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$. Dann ist A per Definition von $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Nach dem Hinweis existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $n \leq m$ gilt für alle $n \in A$. Dann ist aber $A \subset \{1,\dots,m\}$, also $A \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{A \mid A \subset \{1,\dots,m\}\}$.
„ $\supseteq$ “: Sei $A \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{A \mid A \subset \{1,\dots,m\}\}$, also $A \subset \{1,\dots,m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist dann A höchstens so mächtig wie $\{1,\dots,m\}$, d.h. $|A| \leq |\{1,\dots,m\}|$, also endlich, und damit gilt $A \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$.

Wir beweisen nun noch den Hinweis.

Behauptung: Sei $X \subset \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge. Dann existiert genau ein $x \in X$ mit $n \leq x$ für alle $n \in X$. Wir nennen x das *Maximum von* X und schreiben $x = \max X$.

Beweis: Eindeutigkeit: Seien $x, x' \in X$, sodass $n \leq x$ für alle $n \in X$ und $n \leq x'$ für alle $n \in X$. Dann gilt $x' \leq x$ und $x \leq x'$, also folgt $x = x'$.

Existenz: Sei $X = \{x_1,\dots,x_m\}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 1$ ist $X = \{x_1\}$ und $\max X = x_1$. Wir nehmen also an, dass die Behauptung für $m \in \mathbb{N}$ gelte und zeigen, dass sie dann auch für $m+1$ gilt. Es sei also $X = \{x_1,\dots,x_{m+1}\}$. Dann ist $X' = \{x_1,\dots,x_m\}$ eine Menge mit m Elementen, also existiert nach Induktionshypothese $x' = \max X'$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle

(a) $x' \geq x_{m+1}$. In diesem Fall ist $x = x' \in X$ das Maximum von X, denn für jedes $n \in X = X' \cup \{x_{m+1}\}$ gilt $n \leq x' = x$, wegen der Annahme $x' \geq x_{m+1}$ und der Eigenschaft $x' = \max X'$.

(b) $x' \leq x_{m+1}$. Dann behaupten wir, dass $x = x_{m+1}$ das Maximum von $X = X' \cup \{x_{m+1}\}$ ist. Sei dazu $n \in X$. Falls $n \in X'$ ist, folgt $n \leq \max X' = x'$ und wegen $x' \leq x_{m+1} = x$ also $n \leq x$. (Die Relation $\leq$ is nämlich transitiv auf $\mathbb{N}$.) Falls $n = x_{m+1}$ ist gilt $n = x_{m+1} = x$ also auch $n \leq x$, und damit gilt $\max X = x = x_{m+1}$.

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt damit die Existenz des Maximums für alle $m \in \mathbb{N}$. □

9. Zeigen Sie $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Zeigen Sie dazu zunächst (∗)

   (a) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}|$ und

   Lösung:

   In Aufgabe 5 haben wir gesehen, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ gleichmächtig sind, also gilt insbesondere $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}\backslash\{1\}|$. Wir behaupten, dass daraus $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})|$ folgt.
   Tatsächlich ist folgende allgemeinere Aussage wahr:
   Behauptung: Seien A, B Mengen mit $|A| \leq |B|$ (A ist *höchstens so mächtig* wie B). Dann gilt $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$. Außerdem folgt aus $|A| = |B|$ bereits $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
   Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Injetkion $f\colon A \to B$. Dann ist auch die Abbildung

   $$\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \qquad A' \mapsto f(A') = \{b \in B \mid \exists a \in A' \colon f(a) = b\}$$

   eine Injektion. Denn seien $A', A'' \subset A$ mit $f(A') = f(A'')$, dann ist bereits $A' = A''$. Dazu zeigen wir die Inklusion $A' \subset A''$, die andere Inklusion $A'' \subset A'$ folgt analog. Sei $a' \in A'$, dann ist

$f(a') \in f(A') = f(A'')$ also existiert $a'' \in A''$ mit $f(a'') = f(a')$. Da f injektiv ist, folgt $a'' = a'$, daher ist $a' = a'' \in A''$, womit $A' \subset A''$ gezeigt ist.

Der letzte Teil der Behauptung folgt aus dem ersten Teil und dem Satz von Cantor, Schröder und Bernstein (Theorem 1.81 im Analysis-Skript). $\square$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$h\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}, \qquad A \mapsto A \cup \{1\}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})$ ist $\emptyset \neq A \cup \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wir behaupten, dass h injektiv ist. Seien dazu $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})$ mit $A \cup \{1\} = h(A) = h(B) = B \cup \{1\}$. Wegen $1 \notin A, B$ gilt dann $A = (A \cup \{1\}) \backslash \{1\} = (B \cup \{1\}) \backslash \{1\} = B$, also die Injektivität von h.

Nun ist also $\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})$ höchstens so mächtig wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$, d.h. $|\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}|$. Wegen $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{1\})|$ folgt daraus $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}|$, also die Behauptung. (Beachten Sie, dass wegen Lemma 1.42 im Analysis-Skript die Verkettung zweier injektiver Funktionen injektiv ist, weshalb die Relation *höchstens so mächtig wie* transitiv ist.)

(b) $|\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})\,| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$

Lösung:

Wir betrachten die Abbildung

$$g\colon\ (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \qquad (A, B) \mapsto A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, dass g injektiv ist. Seien dazu $(A, B), (A', B') \in (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})$ mit $A \times B = g(A, B) = g(A', B') = A' \times B'$. Wir behaupten, dass $A = A'$ und $B = B'$ gelten. Sei $a \in A$. Dann gibt es wegen $B \neq \emptyset$ ein $b \in B$ mit $(a, b) \in A \times B = A' \times B'$. Wegen $(a, b) \in A' \times B'$ gibt es dann $a' \in A', b' \in B'$ mit $(a, b) = (a', b')$. Also ist $a = a' \in A$ und wir haben $A \subset A'$ gezeigt. Genauso können wir $A' \subset A$ zeigen, also gilt $A = A'$. Analog können wir unter Verwendung von $A \neq \emptyset$ auch $B = B'$ zeigen. Somit ist g injektiv und damit $|\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})\,| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$.

und folgern Sie dann die Behauptung.

Lösung:

Wir machen zunächst noch folgende

Behauptung: Seien A, A', B, B' Mengen mit $|A| \leq |A'|, |B| \leq |B'|$. Dann gilt $|A \times B| \leq |A' \times B'|$.

Beweis: Seien $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$ Injektionen. Dann ist

$$f \times g\colon A \times B \to A' \times B', \qquad (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$$

ebenfalls eine Injektion. Sind nämlich $(a, b), (c, d) \in A \times B$ mit

$$(f(a), g(b)) = (f \times g)\,(a, b) = (f \times g)\,(c, d) = (f(c), g(d)),$$

so gilt $f(a) = f(c)$, also $a = c$ wegen der Injektivität von f, und $g(b) = g(d)$, also $b = d$ wegen der Injektivität von g. $\square$

Zusammen mit (a) und (b) bekommen wir

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\})\,| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|.$$

Nun ist $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ wegen Aufgabe 6 gleichmächtig sind (vgl. Behauptung im Beweis von Teil (a)). Wir erhalten

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Andererseits gilt auch $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})|$, denn z.B. die Abbildung $A \mapsto A \times \{1\}$ ist eine Injektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ höchstens so mächtig ist wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ höchstens so mächtig ist wie $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mit dem Satz von Cantor, Schröder und Bernstein (Theorem 1.81 im Analysis-Skript) folgt die Behauptung: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind gleichmächtig.

10. Seien A, B und C Mengen. Dann ist $A^B = \{f \mid f\colon B \to A \text{ ist eine Funktion}\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\left|A^{B\cup C}\right| = \left|A^B \times A^C\right|$, falls $B \cap C = \emptyset$, und

Lösung:

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon A^B \times A^C = \{f \mid f\colon B \to A\} \times \{g \mid g\colon C \to A\} \to A^{B\cup C}, \qquad (f,g) \mapsto \left(x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in B \\ g(x), & x \in C \end{cases}\right).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in B \\ g(x), & x \in C \end{cases} \tag{3}$$

ist wegen $B \cap C = \emptyset$ eine wohldefinierte Abbildung $B \cup C \to A$, also ein Element von $A^{B\cup C}$. (Wegen $B \cap C = \emptyset$ ist ein Element $x \in B \cup C$ entweder in B oder in C, aber nicht in beiden Mengen, und die Abbildungsvorschrift in (3) ist somit wohldefiniert.)

Wir behaupten nun, dass φ injektiv ist. Seien dazu $(f,g),(h,j) \in A^B \times A^C$ mit $\varphi(f,g) = \varphi(h,j)$. Das bedeutet $\varphi(f,g)(x) = \varphi(h,j)(x)$ für alle $x \in B \cup C$. Sei nun $x \in B$. Dann gilt $\varphi(f,g)(x) = f(x)$ und $\varphi(h,j)(x) = h(x)$ und somit $f(x) = h(x)$. Da $x \in B$ beliebig gewählt war, folgt $f(x) = h(x)$ für alle $x \in B$, also $f = g$ bzw. $f \equiv h$. (Man schreibt hier auch $f \equiv h$, um zu verdeutlichen, dass es sich um eine Gleichheit von Funktionen handelt). Für $x \in C$ gilt $\varphi(f,g)(x) = g(x)$ und $\varphi(h,j)(x) = j(x)$, also $g(x) = j(x)$ für alle $x \in C$, also $g \equiv j$. Also ist φ injektiv wie behauptet.

Sei nun $h\colon B \cup C \to A$ ein Element von $A^{B\cup C}$. Wegen $B, C \subset B \cup C$ können wir die Abbildungen $f\colon B \to A, f(x) = h(x)$ und $g\colon C \to A, g(x) = h(x)$ definieren. Es ist also $(f,g) \in A^B \times A^C$ und wir behaupten $\varphi(f,g) \equiv h$. Um dies zu zeigen, sei $x \in B \cup C$. Dann ist

$$\varphi(f,g)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ g(x), & x \in C \end{cases} = \begin{cases} h(x), & x \in B \\ g(x), & x \in C \end{cases} = h(x)$$

wegen der Definition von f, g. Da $x \in B \cup C$ beliebig gewählt war, folgt $\varphi(f,g) \equiv h$ und wir haben gezeigt, dass φ surjektiv ist.

Die Abbildung φ ist also eine Bijektion und damit sind $A^{B\cup C}$ und $A^B \times A^C$ gleichmächtig.

(b) $\left|\left(A^B\right)^C\right| = \left|A^{B\times C}\right|$. Hierbei ist $(A^B)^C$ die Menge aller Funktionen $f\colon C \to A^B$, sodass für jedes $c \in C$ das Bild $f(c)$ eine Funktion $B \to A$ ist.

Lösung:

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon A^{B\times C} \to \left(A^B\right)^C, \qquad h \mapsto (c \mapsto (b \mapsto h(b,c))).$$

Es ist also $\varphi(h) \in \left(A^B\right)^C$ diejenige Funktion $C \to A^B$, die $c \in C$ auf die Funktion $B \to A, b \mapsto h(b,c)$ schickt. Wir behaupten, dass φ injektiv ist. Seien dazu $h, j \in A^{B\times C}$ mit $\varphi(h) \equiv \varphi(j)$ und sei $(b,c) \in B \times C$. Wegen $\varphi(h) \equiv \varphi(j)$ ist dann $\varphi(h)(c) = \varphi(j)(c) \in A^B$, also

$$h(b,c) = \big(\varphi(h)(c)\big)(b) = \big(\varphi(j)(c)\big)(b) = j(b,c).$$

Da $(b,c) \in B \times C$ beliebig gewählt war, folgt $h(b,c) = j(b,c)$ für alle $(b,c) \in B \times C$, also $h \equiv j$ und die Injektivität von φ ist gezeigt.

Wir zeigen noch, dass φ surjektiv ist. Sei dazu $h \in \left(A^B\right)^C$. Für $c \in C$ ist $h(c)$ also eine Funktion $B \to A$ und die Funktion

$$f\colon B \times C \to A, \qquad (b,c) \mapsto h(c)(b)$$

ist wohldefiniert. Es ist $f \in A^{B\times C}$ und für $b \in B, c \in C$ gilt nach Definiton von φ

$$\big(\varphi(f)(c)\big)(b) = f(b, c) = h(c)(b).$$

Daraus folgt $\varphi(f)(c) = h(c)$ und damit $\varphi(f) \equiv h$, da $b \in B, c \in C$ beliebig gewählt waren. Die Abbildung φ ist also eine Bijektion und $\left(A^B\right)^C$ und $A^{B\times C}$ sind gleichmächtig.